dell'ordinaria geometria, è ragionevole supporre che quand'anche le considerazioni analitiche alle quali si appoggiano le precedenti costruzioni sieno suscettive d'essere estese dal campo di due variabili a quello di tre, i risultati ottenuti in quest'ultimo caso non possano tuttavia essere costruiti coll'ordinaria geometria.

Questa congettura acquista un grado di probabilità molto vicino alla certezza quando s'imprende effettivamente ad estendere l'analisi precedente al caso di tre vabiabili. Infatti ponendo

tf — R2 rfa* u*_

(i 8) $0^2 - t^2 - u^2 - vy$

-j- 2uv dudv -{- 2futdvdt-\- 2tudtdu\,

formola la cui composizione a priori con tre variabili 2, u, v è suggerita dall'ispezione di quella della (i) colle due variabili w, v, si verifica agevolmente che le deduzioni analitiche cui dava luogo l'espressione (i) sussistono integralmente per la nuova, e che il valore di ds dato da essa è effettivamente quello dell'elemento lineare di uno spazio in cui la stereometria non-euclidea trova un'interpetrazione altrettanto completa, analiticamente parlando, quanto quella data per la planimetria.

Ma se alle variabili t, u, v se ne sostituiscono tre nuove p, p_x, p_2 ponendo

t = r cos p_x, u = r sen p_x cos p_2, u = r sen'p_x sen p_2,

Radr

_d si trova

forinola la quale mostra essere p, p_r, p_2 coordinate curvilinee ortogonali dello spazio considerato. Ora il sig. LAMÉ ha dimostrato *) che assumendo come coordinate curvilinee dei punti dello spazio i parametri p, p_x, p_2 di tre famiglie di superficie ortogonali, nel qual caso il quadrato della distanza di due punti infinitamente vicini è rappresentato da un'espressione della forma

le tre funzioni di H, H_{19} H_2 di p, p_x, p_2 che figurano in quest'espressione sono necessariamente soggette a soddisfare due distinte terne di equazioni a derivate parziali, che

*) Lefons sur Us coordonnées curuilignes, pag. 76, 78 (Paris, 1859).